Контрольная тфкп

Dima Tsybulskii[1]

[1]Affiliation not available

November 17, 2020

Задание 1

Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-2)$ функцию:

$$f(z) = \frac{z(1-2i)+4i}{z^2-(1-2i)z-2i}$$

в кольце, к которому принадлежит точка $z=0$. Указать границы кольца сходимости.

Решение:

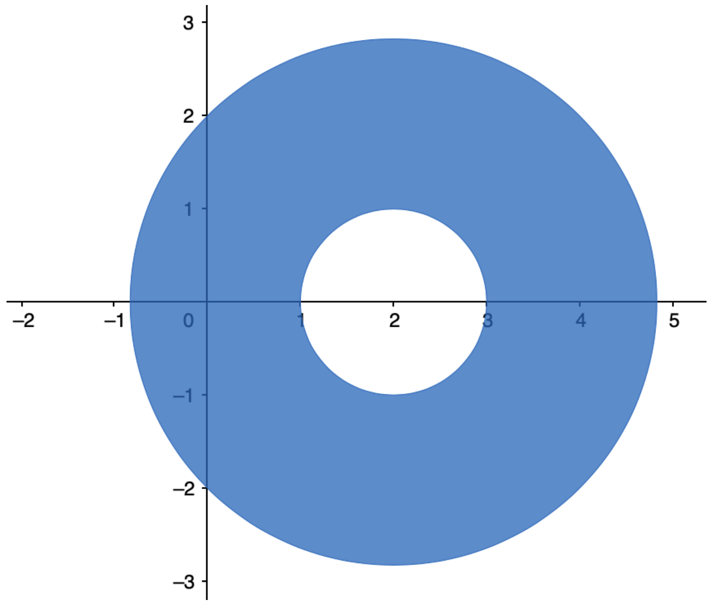
Перепишем знаменатель в виде:

$$z^2-(1-2i)z-2i = (z-1)(z+2i)$$

И разлагая на простые дроби получаем представление для нашей функции в виде:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{2i}{z+2i}$$

Обратимся к картинке, чтобы понять в каком кольце нужно смотреть разложение.



По картинке видно, что $\frac{1}{z-1}$ мы должны разложить по отрицательным степеням (z-2), а $\frac{2i}{z+2i}$ соответсвенно по неотрицательным, тогда в итоге получим разложение Лорана в указанном кольце.

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{(z-2)}\frac{1}{1+\frac{1}{(z-2)}} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,(z-2)^{-k}$$

$$\frac{2i}{z+2i} = \frac{i}{1+i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2+2i}\right)^k(z-2)^k$$

В итоге получаем при $1 < |z-2| < 2\sqrt{2}$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,(z-2)^{-k} + \frac{i}{1+i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2+2i}\right)^k(z-2)^k$$

Задание 2

Исследовать на особые точки функцию:

$$f(z) = \frac{z^2-4}{(\cos\pi z-1)\,z^2}\exp\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{z}\right)}\right)$$

Решение:

1) $z = \frac{1}{\frac{1}{2}+k},\ \ k \in \mathbf{Z}$ - в этих точках экспонента представляется в виде ряда с бесконечным числом ненулевым членов с отрицательными степенями, то есть предела не существует, т.е получили **существенно особые точки**

2)$z = 0$ - **не является особой точкой** т.к не изолирована, в любой окрестности этой точки всегда найдется точка из пункта **1)**

3)$z = 2k, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad k \neq \pm 1, 0$, в этих точках достаточно смотреть на поведение функции $\frac{1}{\cos(\pi z)-1}$, и как несложно заметить в этих точках будем иметь **полюса второго порядка**.

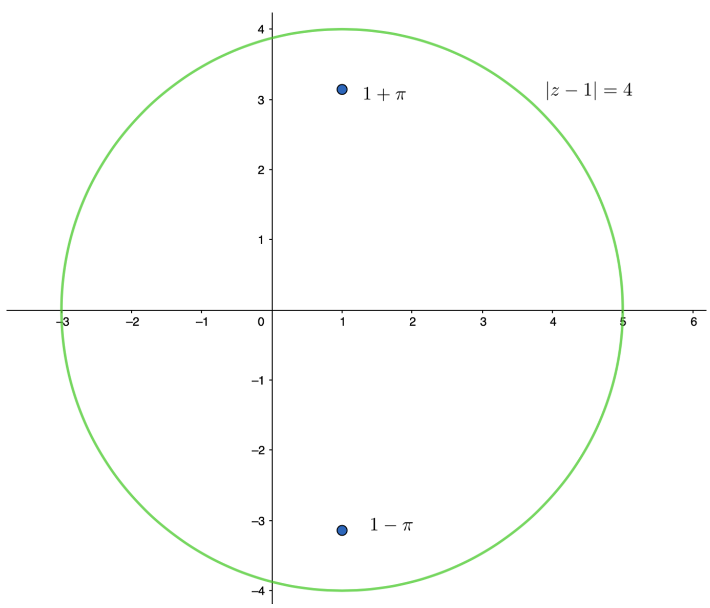
4) $z = \infty$ - **не является особой точкой** в силу того что она опять же не является изолированной и всегда в ее окрестности найдутся точки из пункта **3)**

Задание 3

Вычислить интеграл:

$$\oint_{|z-1|=4} \frac{\sinh(z)}{e^{2z} + e^{z+1}} dz$$

Решение:



Найдем особые точки которые попадают в наш контур, их всего две: $z_1 = 1 + \pi i, \quad z_2 = 1 - \pi i$

Несложно видеть что эти точки являются полюсами первого порядка, вычеты в которых равны соотвественно:

$$Res_{1+\pi} f(z) = Res_{1-\pi} f(z) \frac{\sinh(-1)}{e^2}$$

Отсюда по теореме о вычетах имеем:

$$\oint_{|z-1|=4} \frac{\sinh(z)}{e^{2z}+e^{z+1}}dz = 4\pi i \frac{\sinh(-1)}{e^2}$$

Задание 4

Вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(11-z)\sin(7x+1)}{x^2-6x+13}dx$$

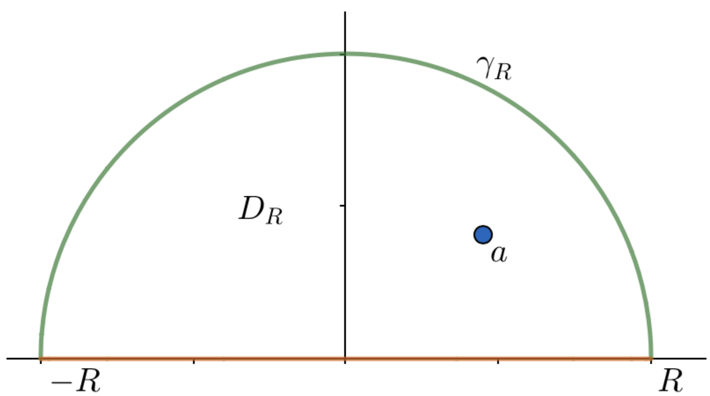
Решение:

Несложно заметить что наш интеграл есть мнимая часть следующего интеграла

$$e^i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(11-z)\,e^{7iz}}{(z-a)(z-\bar{a})}dz$$

Где $a = 3+2i, \;\; \bar{a} = 3-2i$

Рассмотрим следующий контур



Несложно понять что

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$$

Остается посчитать значение интеграла по всему контуру через теорему о вычетах в единственной точке a:

$$Res_a f(z) = \frac{(8-2i)e^{-13+21i}}{4i}$$

Значит

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int_{D_R} f(z)dz = 2\pi i Res_a f(z)$$

Тогда взяв мнимую часть окончательно получаем ответ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(11-z)\sin(7x+1)}{x^2-6x+13}dx = (4\sin(21)-\cos(21))\cdot e^{-13}$$