Mecânica Clássica - Trajetórias e o conceito de tempo

Mario Cezar Bertin[1]

[1]Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia

September 24, 2020

Rich media available at https://youtu.be/cy9LSFUaRbE

O postulado 3

Até este ponto de nossa tentativa de axiomatização da mecânica clássica, introduzimos dois postulados:

1. **Postulado 1:** A posição de uma partícula é representada por um ponto em $\mathbb{R}^3$.
2. **Postulado 2:** A distância entre duas partículas é definida pela métrica euclidiana.

Com estes pontulados, discutimos os conceitos de

1. Partícula e Interação;
2. O espaço euclidiano e suas simetrias;
3. Observáveis euclidianos,

como integrantes fundamentais da teoria.

Agora, devemos introduzir outros dois postulados. O primeiro sedimenta a ideia de como o movimento das partículas é representado no espaço euclidiano e se suporta na percepção de que uma partícula não pode ser criada ou destruída. Neste caso, se uma partícula se move de um ponto A a um ponto B, ele deve percorrer um conjunto contínuo de pontos entre esses pontos, passando por todos os pontos. Este conjunto de pontos é denominado **trajetória**. Por enquanto, é irrelevante a razão do movimento.

> **Postulado 3:** O **movimento** de uma partícula é representado por uma **curva suave** no espaço euclidiano tridimensional.

Assim, apresentamos formalmente o conceito de movimento e seu correspondente do lado matemático do mapeamento de que tanto discutimos; a curva.

Curvas e Trajetórias em $\mathbb{R}^3$

Uma curva é uma relação entre um intervalo fechado da reta real e o espaço euclidiano:

$$\gamma : I = [t_0, t] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3.$$

Portanto, um subconjunto de números reais, que constitui o domínio da curva, é relacionado a um conjunto de pontos, o conjunto imagem de γ, do espaço euclidiano, que constutui seu contra-domínio.

Aqui, vamos diferenciar o conceito de curva e de trajetória. Uma trajetória é composta pelo conjunto imagem da curva e é denotada por um conjunto de equações $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, ou

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix},$$

assim, cada ponto da trajetória está relacionado a um parâmetro t através de um conjunto de equações paramétricas. Por exemplo, uma reta no eixo $\mathbf{e}_1$ é descrita pela equação $x = a + bt$, em que a e b são constantes. Os conceitos de curva e trajetória estão relacionados, mas não são iguais. A curva possui uma orientação definida, enquanto a trajetória não: uma partícula que vai de um ponto A para um ponto B sobre uma trajetória percorre o mesmo conjunto de pontos que uma partícula que vai de B a A pelo mesmo caminho. Assim, as trajetórias são iguais. Contudo, ambos os movimentos são descritos por curvas diferentes.

O tempo

O intervalo $I = [t_0, t]$ é um conjunto varrido por um parâmetro contínuo t que, no geral, é arbitrário. A parametrização mais utilizada para uma curva é seu próprio comprimento, definido a partir da métrica euclidiana. Contudo, na mecânica classica existe uma parametrização especial, definida pelo seguinte postulado:

> **Postulado 4:** O tempo é o parâmetro das curvas que determinam a trajetória das partículas e é definido pelo observador através de relógios. Possui as seguintes propriedades:
>
> - O tempo é homogêneo e uniformemente crescente;
> - Os intervalos de tempo são independentes dos observadores.

Assim, a mecânica clássica define um parâmetro "quase absoluto", definido por cada observador através de seu próprio relógio. Um relógio, neste caso, é um sistema físico oscilatório, que permite que o observador relacione um número real sempre que o relógio retorne a uma configuração de referência.

Ao postular que o tempo é homegêneo, estamos dando ao parâmetro t a mesma liberdade que damos a um ponto do espaço euclidiano, o da escolha arbitrária da origem. Assim, o tempo inicial t_0 de uma curva é arbitrário e pode ser livremente escolhido por um observador. Portanto, dois observadores não precisam concordar com a origem do tempo, o que torna o tempo um conceito relativo: não existe tempo absoluto.

Contudo, os intervalos de tempo não são relativos. Por isso dizemos que a parametrização é quase absoluta. A segunda propriedade do postulado 4 nos diz que dois observadores precisam concordar com o intervalo de tempo sobre a curva. Portanto, $t - t_0$ para $t \geq t_0$ é invariante por translações na origem do tempo. Neste caso, o espaço do parâmetro temporal é um subespaço euclidiano unidimensional típico: é homogêneo e sua função distância é invariante por translações. O mesmo ocorre, se nos lembrarmos, com as coordenadas de distância em uma reta real.

O parâmetro temporal pertence, portanto, a um espaço homogêneo com métrica invariante. Contudo, há uma diferença com relação a uma coordenada de posição: na primeira propriedade, dissemos também que o tempo deve ser uniformemente crescente. O que isto significa? Se pensarmos bem na questão, isto só pode significar que uma curva tem comprimentos de trajetória iguais para tempos iguais. Do início da curva até seu final, o comprimento só pode crescer e, portanto, o tempo age da mesma forma. Pode apenas ser contado no sentido positivo de $\mathbb{R}$. Assim, o tempo deve ser proporcional ao comprimento da trajetória.

Há fortes razões empíricas para postularmos que a seta do tempo sempre aponte para frente. Deixarei que essas razões sejam descobertas pelo leitor, em uma tarefa de pesquisa que será definida no curso.

Suavidades das curvas

Uma curva é **contínua** se a imagem recíproca de um conjunto aberto em $\mathbb{R}^3$ é um conjunto aberto em I. Intuitivamente, isto significa que pequenas variações no tempo implicam em pequenas variações no ponto da trajetória. Esta condição é fundamental para garantir que as trajetórias de partículas sejam contínuas no sentido intuitivo, ou seja, que ela não possa "aparecer" e "desaparecer" durante o movimento.

Contudo, continuidade não é suficiente. É necessário que as primeiras e segundas derivadas das curvas existam e sejam, também, contínuas. Isto é o que se definide como diferenciabilidade, ou suavidade. Se a primeira derivada da trajetória existe e é contínua, dizemos que a curva é de classe C^1. Se a segunda derivada existe e é contínua, a curva é de classe C^2. Uma curva suave, ou infinitamente diferenciável é o ideal para representar o movimento de uma partícula, ou seja, uma curva de classe C^∞. Contudo, para a mecânica clássica, é suficiente que as curvas sejam de classe C^2. A razão será explicada mais adiante, em razão dos postulados dinâmicos.

Velocidade

A primeira derivada de uma curva é a **velocidade**. Assim, vamos tomar uma trajetória genérica $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, ou seja, descrita pelo conjunto de equações

$$x_1 = x_1\left(t\right),$$
$$x_2 = x_2\left(t\right),$$
$$x_3 = x_3\left(t\right).$$

Se a curva for ao menos de classe C^1, existem as primeiras derivadas

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d}{dt}x_1\left(t\right),$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{d}{dt}x_2\left(t\right),$$
$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{d}{dt}x_3\left(t\right),$$

que definem as velocidades nas direções $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$. Portanto, uma curva suave nos permite definir a velocidade de uma partícula sobre a trajetória:

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{x}},$$

em que o ponto acima do vetor posição indica derivada temporal. Assim, a velocidade é o vetor que é a derivada temporal da posição.

Como o tempo é monotonicamente crescente, isto significa que há uma relação linear do tempo com o comprimento da curva. Se denominarmos o comprimento da curva como s e impusermos a condição inicial $t_0 = 0$ para $s = s_0 = 0$, temos que $s = ut$, em que u é uma constante. Assim,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}\frac{ds}{dt} = u\frac{d\mathbf{x}}{ds}.$$

Por outro lado, o vetor $d\mathbf{x}/ds$ é um vetor tangente à trajetória (lembrem-se de Cálculo C). Podemos definir um vetor tangente unitário através da relação

$$\hat{T} \equiv \frac{d\mathbf{x}/ds}{|d\mathbf{x}/ds|},$$

assim,

$$\mathbf{v} = u\left|\frac{d\mathbf{x}}{ds}\right|\hat{T} \equiv v\hat{T},$$

em que, claro, v é o módulo da velocidade da partícula. Portanto, a velocidade é sempre tangente à trajetória.

Aceleração

Caso a curva seja de classe C^2, a trajetória possui segunda derivada contínua. Isto nos permite introduzir a aceleração:

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \equiv \ddot{\mathbf{x}},$$

que tem a seguinte relação com a velocidade:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}}.$$

Portanto, a aceleração é a derivada primeira da velocidade e a segunda derivada da posição.

Agora, tomemos a relação (**??**). A derivada desta relação implica em

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{v}\hat{T} + v\frac{d\hat{T}}{dt}.$$

No primeiro termo, temos a aceleração tangencial da partícula:

$$\mathbf{a}_T \equiv \dot{v}\hat{T},$$

cuja norma é a derivada do módulo da velocidade. No segundo termo, temos a aceleração centrípeta

$$\mathbf{a}_C \equiv v\frac{d\hat{T}}{dt},$$

que pode ser escrita por

$$\mathbf{a}_C \equiv v\frac{d\hat{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = vu\frac{d\hat{T}}{ds}.$$

Por outro lado, o vetor unitário definido por

$$\hat{N} \equiv \frac{d\hat{T}/ds}{\left|d\hat{T}/ds\right|}$$

é um vetor normal à trajetória ($\hat{T} \cdot \hat{N} = 0$). Assim,

$$\mathbf{a}_C = vu\left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right|\hat{N},$$

portanto, o módulo da aceleração centrípeta depende da velocidade, da taxa de variação do comprimento da curva com o tempo e da norma da variação do vetor tangente com relação ao tempo. Esta norma é o que denominamos curvatura:

$$\kappa \equiv \left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right|,$$

de modo que $\mathbf{a}_C = vu\kappa\hat{N}$.

Note, portanto, que a norma da aceleração não é a derivada da norma da velocidade, mas sim

$$a \equiv |\mathbf{a}| = \sqrt{\dot{v}^2 + (vu\kappa)^2},$$

dependendo também da curvatura da trajetória.

Torção

Se a trajetória da partícula é restrita ao plano formado por $\hat{T}$ e $\hat{N}$, e este plano não muda de orientação durante o movimento, a partícula fica restrita a este plano, portanto, podemos ver que este é o caso de um movimento bidimensional. Contudo, é possível que um movimento mais geral resulte que este plano, denominado plano osculante, mude com o tempo. Dizemos, assim, que a trajetória da partícula tem torção diferente de zero.

O vetor normal ao plano osculante com módulo positivo na direção da velocidade da partícula é denominado **vetor binormal**. Com o produto vetorial, podemos definir o vetor binormal através da relação

$$\hat{B} \equiv \hat{T} \times \hat{N}.$$

Abaixo, vamos introduzir o produto vetorial. Por enquanto, um plano osculante constante implica que o vetor binormal tem derivada nula com relação ao tempo, ou mais precisamente, com relação ao valor de comprimento da trajetória.

Se o vetor binormal não é constante na trajetória, temos

$$\tau \equiv \left| \frac{d\hat{B}}{ds} \right|,$$

que define a **torção** da trajetória. Uma trajetória com torção não se restringe ao movimento da partícula em um único plano.

O produto vetorial

Em três dimensões, é possivel a definição de um produto antissimétrico que leva dois vetores a um vetor, o produto vetorial. Neste caso, o produto é definido por uma operação

$$\bullet \times \bullet : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$

com as seguintes propriedades (sejam $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ e $a, b \in \Phi$):

1. Antissimetria: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$;
2. Bilinearidade: $\mathbf{u} \times (a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a\mathbf{u} \times \mathbf{v} + b\mathbf{u} \times \mathbf{w}$;
3. Identidade de Jacobi: $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$.

Contudo, o produto vetorial não é associativo.

A expressão mais simples para o produto vetorial pode ser escrita pelo determinante

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & amp; \mathbf{e}_2 & amp; \mathbf{e}_3 \\ u_1 & amp; u_2 & amp; u_3 \\ v_1 & amp; v_2 & amp; v_2 \end{pmatrix},$$

cuja norma é definida pela expressão

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \sin\theta,$$

em que θ é o ângulo entre os dois vetores.