Mecânica Clássica - Isotropia do Espaço

Mario Cezar Bertin[1]

[1]Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia

September 24, 2020

Rich media available at https://youtu.be/8SS8iUwkAhM

Rotações

A isotropia de um espaço está relacionada à invariância de suas características geométricas por rotações. Uma ro tação é uma operação que pode ser executada diretamente sobre o sistema físico, tenho assim form a ativa, mas também possui uma versão passiva, que consiste na rotação do sistema de coordenadas, mas mantém o sistema inalterado. Uma rotação na forma ativa consiste na rotação inversa em forma passiva, e vice-versa.

Por exemplo, podemos tomar uma rotação passiva no espaço euclidiano bidimensional $\mathbb{R}^2$, como no caso da fig. 1.

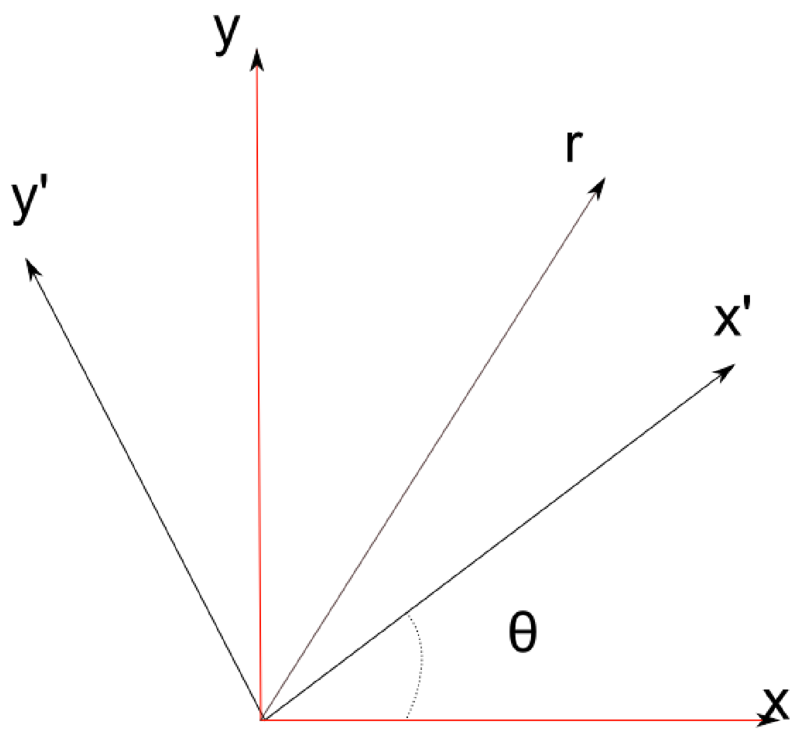

Figure 1: Rotação passiva em duas dimensões no sentido anti-horário.

Por simples trigonometria, podemos deduzir que uma rotação passiva com ângulo θ no sentido anti-horário é representada pela transformação

$$y_1 = x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta, \tag{1}$$
$$y_2 = -x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta, \tag{2}$$
$$\tag{3}$$

em que $(x_1, x_2) = (x, y)$ e $(y_1, y_2) = (x', y')$ na fig. 1.

Assim como no caso das translações, uma rotação bidimensional pode ser representada em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta \\ -x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{4}$$
$$\tag{5}$$

portanto, a matriz

$$R(\theta) \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\tag{7}$$

é uma matriz de rotação. Em duas dimensões, apenas um parâmetro é necessário para caracterizar uma rotação, no caso, o ângulo de rotação θ.

Em três dimensões, uma rotação necessita de três parâmetros para ser caracterizada. Contudo, o teorema de Euler, que demonstraremos quando estudarmos corpos rígidos, estabelece que toda rotação em três dimensões pode ser representada com um ângulo e um eixo de rotação. O eixo de rotação consiste em uma reta invariante. Por exemplo, uma rotação tridimensional de eixo e_3 e ângulo θ é representado pela matriz

$$R_3(\theta) \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Rotações nos eixos e_1 e e_2 com ângulos α e β, respectivamente, são representados pelas matrizes

$$R_1(\alpha) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad R_2(\beta) \equiv \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Matrizes de rotação, como R_1, R_2 e R_3, possuem propriedades especiais:

1. Duas rotações sucessivas formam, também, uma rotação.
2. Existe a transformação que consiste na rotação com ângulo zero. Esta matriz é a matriz identidade em três dimensões.
3. Matrizes de rotação são ortogonais, ou seja, $RR^T = R^T R = \mathbf{1}_3$;
4. Existe a matriz de rotação inversa, que consiste na matriz em que o ângulo muda de sentido, por exemplo, $\theta \to -\theta$ em (8). Em razão da propriedade de ortogonalidade, temos $R^{-1} = R^T$.
5. Um matriz de rotação tem determinante unitário, ou seja, $\det R = 1$.
6. Duas rotações sucessivas são não comutativas. Por exemplo, $R_2 R_1 \neq R_1 R_2$.

Com essas propriedades, o conjunto de todas as matrizes de rotação formam um **grupo não abeliano**, o **grupo ortogonal especial tridimensional**, representado pelo símbolo $SO(3)$.

Qualquer rotação em $\mathbb{R}^3$ pode ser composta pelo produto de três rotações sob certas propriedades. Este é o caso de R_1, R_2 e R_3. Assim, esta representação da matriz geral de rotação tem três ângulos. O produto em si é dado por

$$R(\alpha, \beta, \theta) = R_3(\theta) R_2(\beta) R_1(\alpha), \tag{10}$$

e tem como resultado a matriz

$$\begin{pmatrix} \cos\beta\cos\theta & \sin\alpha\sin\beta\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta & -\cos\alpha\sin\beta\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta \\ -\cos\beta\sin\theta & -\sin\alpha\sin\beta\sin\theta + \cos\alpha\cos\theta & +\cos\alpha\sin\beta\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta \\ \sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Outras representações gerais para uma rotação em três dimensões podem ser obtidas como, por exemplo, as que se utilizam dos **ângulos de Euler**. Contudo, revisitaremos este assunto quando estudarmos os corpos rígidos.

Para demonstrar a isotropia do espaço $\mathbb{R}^3$, vamos tomar a métrica na forma

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 \,, \tag{12}$$

em que, genericamente, escrevermos $\Delta s \equiv D(x, y)$ e $\Delta x \equiv |y - x|$. Agora, vamos tomar os dois pontos x e y infinitesimalmente próximos, de modo que as diferenças finitas Δx tornam-se diferenciais dx e a distância absoluta Δs torna-se a distância infinitesimal ds:

$$(ds)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 \,. \tag{13}$$

Vamos introduzir as matrizes

$$(\mathbf{dx}) \equiv \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{1}_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Neste caso, (13) pode ser escrita por

$$(ds)^2 = (\mathbf{dx})^T \, (\mathbf{dx}) \,, \tag{15}$$

em que $(\mathbf{dx})^T = \left(\, dx_1 \quad amp; dx_2 \quad amp; dx_3 \, \right)$ é a transposta da matriz $(\mathbf{dx})$.

Se as coordenadas de um ponto $x \in \mathbb{R}^3$ se transformam como $x \to Rx$, em que $R \in SO(3)$, então as diferenciais devem se transformar como

$$(\mathbf{dx}) \longrightarrow (\mathbf{dx}') = R \, (\mathbf{dx}) \,. \tag{16}$$

A transposta do produto de matrizes é o produto das transpostas com ordem inversa, ou seja, se A e B são matrizes, $(AB)^T = B^T A^T$. Portanto, temos

$$(\mathbf{dx})^T \longrightarrow (\mathbf{dx}')^T = (R\mathbf{dx})^T = (\mathbf{dx})^T \, R^T. \tag{17}$$

Precisamos das inversas das transformações (16) e (17):

$$(\mathbf{dx}') \longrightarrow (\mathbf{dx}) = R^{-1} \, (\mathbf{dx}') = R^T \, (\mathbf{dx}') \,, \tag{18}$$

$$(\mathbf{dx}')^T \longrightarrow (\mathbf{dx})^T = \left(R^T \mathbf{dx}'\right)^T = (\mathbf{dx}')^T \, R, \tag{19}$$

em que usamos o fato de R ser ortogonal. Neste caso, podemos ver como se modifica a eq. (15) com o seguinte cálculo:

$$(ds)^2 = (\mathbf{dx})^T \, (\mathbf{dx}) = (\mathbf{dx}')^T \, RR^T \, (\mathbf{dx}') \,. \tag{20}$$

Como $RR^T = \mathbf{1}_3$, temos

$$(ds)^2 = (\mathbf{dx}')^T \, (\mathbf{dx}') = (ds')^2 \,. \tag{21}$$

Assim, de fato o elemento de linha diferencial é invariante por rotações. O mesmo ocorrerá com qualquer intervalo finito de linha e, portanto, com a função distância

$$D\left(x,y\right)=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left(y_i-x_i\right)^2}, \tag{22}$$

que tem a lei de transformação

$$x\rightarrow x'=Rx \implies D\left(x,y\right)\rightarrow D\left(x',y'\right)=D\left(x,y\right). \tag{23}$$

A invariância da métrica por rotações implica no importante fato físico de que a orientação do observador não afeta a medida de observáveis geométricos do sistema físico.