Mecânica Clássica: Sistemas de Coordenadas e Referenciais

Mario Cezar Bertin[1]

[1]Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia

24 de setembro de 2020

Rich media available at https://youtu.be/z3bohffdB28

Sistemas referenciais

Vamos relembrar os dois primeiros postulados:

> **Postulado 1:** A posição de uma partícula consiste em um elemento (ou ponto) do espaço euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$.
>
> **Postulado 2:** A distância entre duas partículas de posições $x \equiv (x_1, x_2, x_3)$ $y \equiv (y_1, y_2, y_3)$ é dada pela métrica euclidiana
>
> $$D(x,y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}.$$

Estes dois postulados estabelecem o mapeamento da estrutura física da mecânica clássica na estrutura matemática do espaço cartesiano com a métrica euclidiana. Os espaços euclidianos, em si, possuem estruturas complexas que, ao menos em parte, devemos apreciar. E a escolha da métrica euclidiana, como já dissemos, é uma escolha empírica; parece ser uma propriedade dos sistemas mecânicos que as distâncias sejam calculadas pelo teorema de Pitágoras.

Duas são as características de $\mathbb{R}^3$ que são fundamentais para a mecânica clássica:

1. A geometria euclidiana é homogênea e isotrópica;
2. O espaço $\mathbb{R}^3$ é, em si, um espaço vetorial.

Nesta aula, vamos abordar essas características.

Sistemas de coordenadas

Em espaços métricos, como no caso do espaço euclidiano, podemos definir sistemas de coordenadas. O exemplo mais simples no caso de $\mathbb{R}^3$ é o sistema de coordenadas cartesiano (fig. 1), que consiste em uma origem e três eixos cartesianos reais. Cada eixo cartesiano representa uma reta real e cada ponto é representado por uma trinca ordenada de números reais (x, y, z). Por vezes também utilizaremos a notação (x_1, x_2, x_3). As coordenadas da origem são, naturalmente, $(0, 0, 0)$.

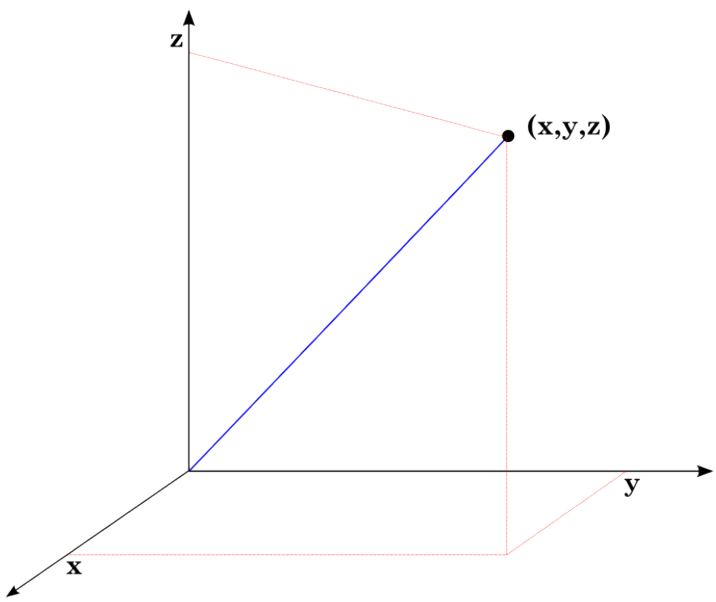

Figura 1: O sistema de coordenadas cartesiano (x, y, z).

Dizemos que o sistema cartesiano é “natural” em razão da topologia e geometria da reta real: as coordenadas cartesianas são simplesmente compostas por trincas ordenadas das coordenadas da reta real. Escolher as coordenadas da reta real é uma tarefa que envolve apenas a especificação do ponto zero, ou seja, da origem da reta. Uma vez que a estrutura gráfica de $\mathbb{R}^3$ é a da interseção de três retas reais perpendiculares entre si, estabelecer a origem é a única preocupação.

Contudo, podemos utilizar outros sistemas de coordenadas para representar posições em $\mathbb{R}^3$. São os casos, por exemplo, das coordenadas esférico-polares (fig. 2).

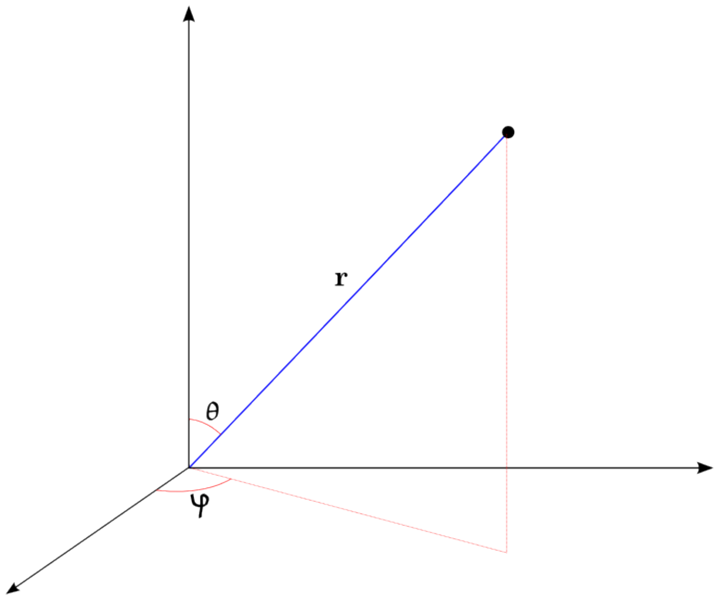

Figura 2: O sistema de coordenadas esférico-polar (r, θ, φ).

Observando-se a fig. 2, podemos relacionar as coordenadas esférico-polares às coordenadas cartesianas. Por esta razão os eixos ordenados são geralmente representados no gráfico. Como a posição z é a projeção da reta r sobre o eixo z, vemos claramente que

$$z = r \cos \theta. \tag{1}$$

Por outro lado, precisamos projetar a reta r sobre o eixo x para encontrar a relação entre a coordenada x e as coordenadas esférico-polares (r, θ, φ). Primeiro, devemos projetar a reta sobre o plano xy, que resulta na distância $r \sin \theta$. Para projetar no eixo x, basta projetar esta distância no cateto adjacente a φ. Assim,

$$x = r \sin\theta \cos\varphi. \tag{2}$$

A projeção no eixo y, pela mesma razão, resulta na equação

$$y = r \sin\theta \sin\varphi. \tag{3}$$

O sistema esférico-polar é útil quando o sistema mecânico possui simetria esférica, como veremos ao longo do curso. Outro exemplo importante é o do sistema de coordenadas cilíndrico, representado na fig. 3.

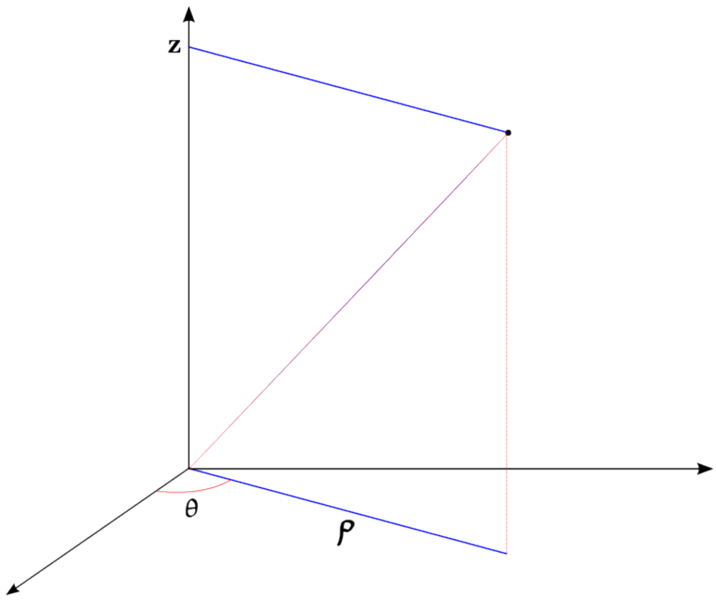

Figura 3: O sistema de coordenadas cilíndrico (ρ, θ, z).

Sistemas referenciais

Podemos definir um sistema referencial como um observador $\mathcal{O}$ munido de um sistema de coordenadas $\{x\} \in \mathbb{R}^3$, formando um conjunto $(\mathcal{O}, \{x\})$. Um único observador pode se utilizar de dois ou mais sistemas de coordenadas para executar uma medida, assim como um mesmo sistema de coordenadas pode ser utilizado por dois observadores distintos. Na mecânica newtoniana, como veremos, as medidas de muitos observáveis físicos dependem intrinsecamente do sistema referencial utilizado. Sempre que um observável é estudado, devemos definir explicitamente qual sistema referencial é utilizado.

Um sistema físico de referência é um conceito físico ligado a uma estrutura matemática, assim como a posição. O observador por si não é suficiente para definir um referencial e devemos ter em mente que o conceito matemático de sistemas de coordenadas também não define por si um referencial. Assim, sistemas de referência e sistemas de coordenadas estão relacionados, mas não são equivalentes.

Os sistemas de coordenadas deveriam ser irrelevantes para uma teoria física. Contudo, o desenvolvimento da mecânica newtoniana não se deu independentemente de sua utilização. Fundamentalmente, uma teoria física fundamental deveria

1. Ser independente do sistema de coordenadas escolhido.
2. Ser independente do observador.

O primeiro requisito é puramente formal. Um sistema de coordenadas é apenas uma representação ordenada das posições de partículas e corpos no espaço. O espaço em si não sofre nenhuma modificação quando um sistema de coordenadas é transformado em outro, como no caso dos sistemas cartesiano e esférico-polar. Qualquer que seja a posição de uma partícula, ela não se modifica quando as coordenadas são mudadas. A física, portanto, deve ser invariante por transformações gerais de coordenadas.

Já o segundo requisito tem uma natureza epistemológica de fundamental relevância. Uma teoria física independente do observador possui a propriedade da **covariância geral**, que significa a invariância da medida por sistemas referenciais. Nossa ideia principal não é construir uma teoria com covariância geral. Se este fosse o desejo dos fundadores da mecânica, a teoria de Newton provavelmente não teria sido formulada, e a **Relatividade Geral**, por outro lado, teria tido um início bastante precoce. A mecânica clássica newtoniana, como mostraremos, é uma teoria invariante por um subconjunto de transformações referenciais.

A mecânica clássica vetorial, aquela introduzida por Newton, contudo, não é uma teoria independente do sistema de coordenadas, tampouco independente do sistema referencial. Esta é a razão da existência de outros formalismos, já que a dependência dos sistemas de coordenadas pode ser resolvida pelo formalismo Lagrangiano. Contudo, a dependência de uma sub-classe de sistemas referenciais, os referenciais inerciais, foi resolvida apenas no início do século XX, pela Relatividade Geral. Retornaremos a este assunto mais adiante.